Centralna Komisja Egzaminacyjna w Warszawie

EGZAMIN MATURALNY 2010

MATEMATYKA

POZIOM ROZSZERZONY

Klucz punktowania odpowiedzi

MAJ 2010

Za prawidłowe rozwiązanie każdego z zadań inną metodą niż przedstawiona w schemacie przyznajemy maksymalną liczbę punktów.

Zadanie 1. (0–4)

Obszar standardów	**Sprawdzane umiejętności**
Użycie i tworzenie strategii	Rozwiązanie nierówności z wartością bezwzględną

<u>I sposób rozwiązania</u> (wyróżnienie na osi liczbowej przedziałów)

Wyróżniamy na osi liczbowej przedziały: $\left(-\infty,-2\right)$, $\left\langle -2,1\right)$, $\left\langle 1,\infty\right)$.

Rozwiązujemy nierówności w poszczególnych przedziałach i w każdym przedziale bierzemy część wspólną tego przedziału z otrzymanym zbiorem rozwiązań nierówności.

$x\in\left(-\infty,-2\right)$	$x\in\left\langle -2,1\right)$	$x\in\left\langle 1,\infty\right)$
$-2x-4-x+1\le 6$ $-3x\le 9$ $x\ge -3$ W tym przypadku rozwiązaniem nierówności jest $-3\le x<-2$	$2x+4-x+1\le 6$ $x\le 1$ W tym przypadku rozwiązaniem nierówności jest $-2\le x<1$	$2x+4+x-1\le 6$ $3x\le 3$ $x\le 1$ W tym przypadku rozwiązaniem nierówności jest $x=1$

Łącząc otrzymane rozwiązania, podajemy ostateczną odpowiedź: $-3\le x\le 1$ lub zapisujemy odpowiedź: Zbiorem rozwiązań nierówności jest $\left\langle -3,1\right\rangle$.

<u>II sposób rozwiązania</u> (zapisanie czterech przypadków)

Zapisujemy cztery przypadki: $\begin{cases}2x+4\ge 0\\ x-1\ge 0\end{cases}$ $\begin{cases}2x+4\ge 0\\ x-1<0\end{cases}$ $\begin{cases}2x+4<0\\ x-1\ge 0\end{cases}$ $\begin{cases}2x+4<0\\ x-1<0\end{cases}$

$\begin{cases}2x+4\ge 0\\ x-1\ge 0\end{cases}$ $\begin{cases}2x+4\ge 0\\ x-1\ge 0\\ 2x+4+x-1\le 6\end{cases}$ $\begin{cases}x\ge -2\\ x\ge 1\\ 3x\le 3\end{cases}$ $\begin{cases}x\ge -2\\ x\ge 1\\ x\le 1\end{cases}$ $x=1$	$\begin{cases}2x+4\ge 0\\ x-1<0\end{cases}$ $\begin{cases}2x+4\ge 0\\ x-1<0\\ 2x+4-x+1\le 6\end{cases}$ $\begin{cases}x\ge -2\\ x<1\\ x\le 1\end{cases}$ $x\in\left\langle -2,1\right)$	$\begin{cases}2x+4<0\\ x-1\ge 0\end{cases}$ niemożliwe	$\begin{cases}2x+4<0\\ x-1<0\end{cases}$ $\begin{cases}2x+4<0\\ x-1<0\\ -2x-4-x+1\le 6\end{cases}$ $\begin{cases}x<-2\\ x<1\\ -3x\le 9\end{cases}$ $\begin{cases}x<-2\\ x<1\\ x\ge -3\end{cases}$ $x\in\left\langle -3,-2\right)$

Łącząc otrzymane rozwiązania, podajemy ostateczną odpowiedź: $-3\le x\le 1$ lub zapisujemy odpowiedź: Zbiorem rozwiązań nierówności jest $\left\langle -3,1\right\rangle$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 1 pkt

Zdający wyróżni na osi liczbowej przedziały $(-\infty,-2)$, $\langle -2,1)$, $\langle 1,\infty)$.

albo

- zapisze cztery przypadki: $\begin{cases} 2x+4\ge 0 \\ x-1\ge 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x+4\ge 0 \\ x-1< 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x+4< 0 \\ x-1\ge 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x+4< 0 \\ x-1< 0 \end{cases}$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2 pkt

Zdający zapisze nierówności w poszczególnych przedziałach, np.

I. $x\in(-\infty,-2)$ $\quad -2x-4-x+1\le 6$

II. $x\in\langle -2,1)$ $\quad 2x+4-x+1\le 6$

III. $x\in\langle 1,\infty)$ $\quad 2x+4+x-1\le 6$

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... 3 pkt

- zdający poprawnie rozwiąże nierówności i wyznaczy części wspólne otrzymanych wyników z poszczególnymi przedziałami tylko w dwóch przypadkach, popełni błąd w trzecim przypadku i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca

albo

- zdający poprawnie rozwiąże nierówności tylko w dwóch przedziałach i wyznaczy części wspólne otrzymanych wyników z poszczególnymi przedziałami i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca

albo

- zdający rozpatrzy cztery przypadki, poprawnie rozwiąże nierówności i wyznaczy części wspólne otrzymanych wyników z poszczególnymi przedziałami tylko w dwóch przypadkach, stwierdzi, że jeden jest niemożliwy, popełni błąd w trzecim przypadku i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

Zdający zapisze odpowiedź: $x\in\langle -3,1\rangle$.

<u>III sposób rozwiązania</u> (graficznie)

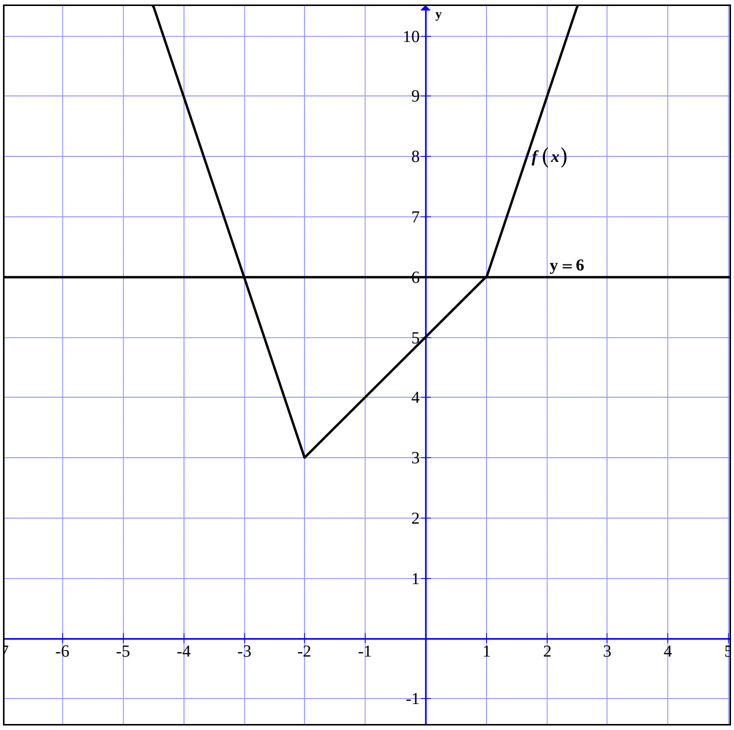
Rysujemy wykresy funkcji $f(x)=|2x+4|+|x-1|$ i prostą o równaniu $y=6$.

Wyróżniamy na osi liczbowej przedziały: $(-\infty,-2)$, $\langle -2,1)$, $\langle 1,\infty)$.

Zapisujemy wzór funkcji *f* w poszczególnych przedziałach bez wartości bezwzględnej, np.

$$f(x)=\begin{cases} -3x-3 & \text{dla } x\in(-\infty,-2) \\ x+5 & \text{dla } x\in\langle -2,1) \\ 3x+3 & \text{dla } x\in\langle 1,\infty) \end{cases}$$

Rysujemy wykres funkcji *f* i prostą o równaniu $y=6$



Odczytujemy odcięte punktów przecięcia się wykresu funkcji f i prostej o równaniu $y=6$:
$x=-3$ i $x=1$.
Podajemy argumenty, dla których $f(x)\le 6$: $x\in\langle -3,1\rangle$.

<u>**Schemat oceniania**</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt

Zdający wyróżni przedziały: $(-\infty,-2)$, $\langle -2,1)$, $\langle 1,\infty)$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Zdający zapisze wzór funkcji *f* w poszczególnych przedziałach, np.

I. $x\in(-\infty,-2)$ $\quad f(x)=-3x-3$

II. $x\in\langle -2,1)$ $\quad f(x)=x+5$

III. $x\in\langle 1,\infty)$ $\quad f(x)=3x+3$

lub

$$f(x)=\begin{cases}-3x-3 & \text{dla } x\in(-\infty,-2)\\ x+5 & \text{dla } x\in\langle -2,1)\\ 3x+3 & \text{dla } x\in\langle 1,\infty)\end{cases}$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Zdający narysuje wykres funkcji *f* i prostą o równaniu $y=6$.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

Zdający zapisze odpowiedź: $x\in\langle -3,1\rangle$.

Zadanie 2. (0–4)

Obszar standardów	**Sprawdzane umiejętności**
Użycie i tworzenie strategii	Rozwiązanie równania trygonometrycznego

<u>Rozwiązanie</u>

Przekształcamy równanie do postaci, w której występuje tylko jedna funkcja trygonometryczna:

$2\left(1-\sin^2 x\right)-5\sin x-4=0$

Porządkujemy to równanie i wprowadzamy niewiadomą pomocniczą:

$-2\sin^2 x-5\sin x-2=0$, $t=\sin x$, gdzie $t\in\langle -1,1\rangle$. Równanie przyjmuje teraz postać:

$2t^2+5t+2=0$

Rozwiązujemy równanie kwadratowe ze zmienną *t*:

$\Delta=9 \qquad t_1=-2 \quad t_2=-\frac{1}{2}$ ale $t_1\notin\langle -1,1\rangle$

Zapisujemy rozwiązania równania $\sin x=-\frac{1}{2}$ należące do przedziału $\langle 0,2\pi\rangle$:

$x=\frac{11\pi}{6}$ i $x=\frac{7}{6}\pi$.

<u>Schemat oceniania</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania .... 1 pkt

Zapisanie równania w zależności od jednej funkcji trygonometrycznej, np.

$-2\sin^2 x-5\sin x-2=0$ lub $2\sin^2 x+5\sin x+2=0$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Wprowadzenie pomocniczej niewiadomej, np. $t=\sin x$, zapisanie równania w postaci

$-2t^2-5t-2=0$ lub $2t^2+5t+2=0$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Rozwiązanie równania kwadratowego ($t=-2$ lub $t=-\frac{1}{2}$) i odrzucenie rozwiązania $t=-2$.

<u>Uwaga</u>

Zdający może od razu rozwiązywać równanie kwadratowe (w którym niewiadomą jest $\sin x$) i zapisać rozwiązanie w postaci $\sin x=-\frac{1}{2}$ lub $\sin x=-2$ oraz zapisać, że równanie $\sin x=-2$ jest sprzeczne.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

Rozwiązanie równania w podanym przedziale:

$x=\frac{7}{6}\pi$ lub $x=\frac{11}{6}\pi$

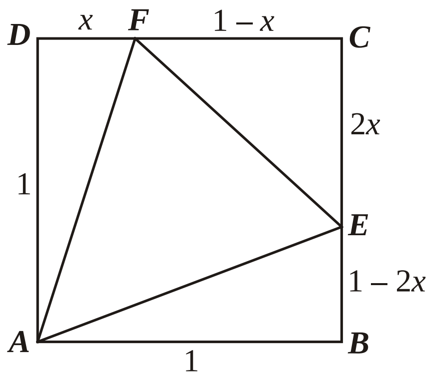
albo

$x=210^\circ$ lub $x=330^\circ$

Zadanie 3. (0–4)

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności
Użycie i tworzenie strategii	Rozwiązanie zadania, umieszczonego w kontekście praktycznym, prowadzącego do badania funkcji kwadratowej

Rozwiązanie



Długości odcinków $|BE|$ i $|CF|$ są następujące: $|BE| = 1 - 2x$, $|CF| = 1 - x$.

Pole trójkąta *AEF* jest więc równe:

$$P_{AEF} = P_{ABCD} - P_{ABE} - P_{ECF} - P_{FDA} = 1 - \frac{1}{2}(1-2x) - \frac{1}{2}\cdot 2x\cdot(1-x) - \frac{1}{2}x = x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

Pole trójkąta *AEF* jest funkcją zmiennej *x*: $P(x) = x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ dla $x \in \left\langle 0, \frac{1}{2} \right\rangle$.

Ponieważ $x_w = -\frac{-\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4} \in \left\langle 0, \frac{1}{2} \right\rangle$, a parabola o równaniu $P(x) = x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ ma ramiona skierowane „ku górze”, więc dla $x = \frac{1}{4}$ pole trójkąta *AEF* jest najmniejsze.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania..1 pkt

Zapisanie, że $P_{AEF} = P_{ABCD} - P_{ADF} - P_{CEF} - P_{ABE}$ lub $P_{AEF} = P_{ABCD} - (P_{ADF} + P_{CEF} + P_{ABE})$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt

Zapisanie pól trójkątów *ADF*, *ABE* i *CEF*: $P_{\Delta ADF} = \frac{1}{2}x$, $P_{\Delta ABE} = \frac{1-2x}{2}$

i $P_{\Delta CEF} = \frac{-2x^2 + 2x}{2} = -x^2 + x$.

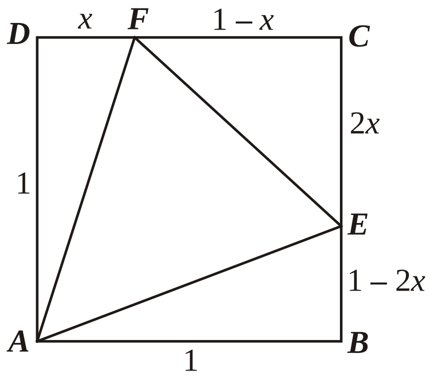
Pokonanie zasadniczych trudności zadania...3 pkt

Zapisanie P_{AEF} w postaci trójmianu kwadratowego zmiennej *x*: $P(x) = x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

Rozwiązanie pełne ....4 pkt

Wyznaczenie *x*, dla którego funkcja przyjmuje minimum: $x = \frac{1}{4}$.

II sposób rozwiązania (geometria analityczna)



Przyjmujemy współrzędne punktów na płaszczyźnie: $A=(0,0), F=(x,1), E=(1,1-2x)$.

Wyznaczamy pole trójkąta AFE:

$$P=\frac{1}{2}\left|(x-0)(1-2x-0)-(1-0)(1-0)\right|=\frac{1}{2}\left|x(1-2x)-1\right|=\frac{1}{2}\left|x-2x^2-1\right|=\frac{1}{2}\left|2x^2-x+1\right|$$

$$P(x)=x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$$

Ponieważ $x_w=-\frac{-\frac{1}{2}}{2}=\frac{1}{4}\in\left\langle 0,\frac{1}{2}\right\rangle$, a parabola o równaniu $P(x)=x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ ma ramiona skierowane „ku górze”, więc dla $x=\frac{1}{4}$ pole trójkąta AEF jest najmniejsze.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania .... 1 pkt

Wyznaczenie współrzędnych punktów na płaszczyźnie:
$A=(0,0), F=(x,1), E=(1,1-2x)$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Wyznaczenie pola trójkąta AFE:

$$P=\frac{1}{2}\left|(x-0)(1-2x-0)-(1-0)(1-0)\right|=\frac{1}{2}\left|x(1-2x)-1\right|=\frac{1}{2}\left|x-2x^2-1\right|=\frac{1}{2}\left|2x^2-x+1\right|$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Zapisanie P_{AEF} w postaci trójmianu kwadratowego zmiennej x: $P(x)=x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

Wyznaczenie x, dla którego funkcja przyjmuje minimum: $x=\frac{1}{4}$.

Zadanie 4. (0–4)

Obszar standardów	**Sprawdzane umiejętności**
Użycie i tworzenie strategii	Stosowanie twierdzenia o reszcie z dzielenia wielomianów przez dwumian

Rozwiązanie

Korzystając z warunków zadania zapisujemy układ równań

$$\begin{cases} 8+4a+2b+1=7 \\ 27+9a+3b+1=10 \end{cases}$$

Z układu równań obliczamy a i b

$$\begin{cases} 4a+2b=-2 \\ 9a+3b=-18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=-2a-1 \\ 9a-6a-3=-18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=-5 \\ b=9 \end{cases}$$

Warunki zadania są spełnione dla $a=-5, \quad b=9$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny do rozwiązania zadania ....1 pkt

Zapisanie jednego z równań:

$8+4a+2b+1=7$ albo $27+9a+3b+1=10$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 2pkt

Zapisanie układu równań:

$$\begin{cases} 8+4a+2b+1=7 \\ 27+9a+3b+1=10 \end{cases}$$

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ....3pkt.

Rozwiązanie układu równań z błędem rachunkowym.

Rozwiązanie pełne ....4 pkt.

Rozwiązanie układu równań: $a=-5$, $b=9$.

Zadanie 5. (0–5)

Obszar standardów	**Sprawdzane umiejętności**
Modelowanie matematyczne	Wykorzystanie własności ciągu arytmetycznego i ciągu geometrycznego

I sposób rozwiązania

Z własności ciągu arytmetycznego mamy: $2b=a+c$. Stąd i z warunków zadania otrzymujemy, że : $2b=10$ czyli $b=5$.

Z własności ciągu geometrycznego zapisujemy równanie: $(b+4)^2=(a+1)\cdot(c+19)$.

Zatem otrzymujemy układ równań, np. $\begin{cases} b=5 \\ a+c=10 \\ (b+4)^2=(a+1)\cdot(c+19) \end{cases}$

Z drugiego równania wyznaczamy $a=10-c$ lub $c=10-a$ i wstawiamy do trzeciego równania.

Otrzymujemy równanie, np. $9^2=(10-c+1)(c+19)$ lub $9^2=(a+1)(10-a+19)$.

Przekształcamy to równanie i otrzymujemy równanie z niewiadomą c lub a, np.

$c^2+8c-128=0$ lub $a^2-28a+52=0$.

Rozwiązaniem równania są :

$c_1=8,\ c_2=-16$ lub $a_1=2,\ a_2=26$.

Zatem szukanymi liczbami są: $a=2,\ b=5,\ c=8$ lub $a=26,\ b=5,\ c=-16$.

<u>**Schemat oceniania do I sposobu rozwiązania**</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny do pełnego rozwiązania zadania .... 1 pkt

Wykorzystanie własności ciągu arytmetycznego (geometrycznego) i zapisanie odpowiedniego równania, np.

- $2b=a+c$

albo

- $(b+4)^2=(a+1)(c+19)$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Wykorzystanie własności obu ciągów (arytmetycznego i geometrycznego) i zapisanie układu równań umożliwiającego obliczenie liczb a, b, c, np.

$$\begin{cases} 2b=a+c \\ a+c=10 \\ (b+4)^2=(a+1)\cdot(c+19) \end{cases}$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Przekształcenie układu równań do równania kwadratowego z niewiadomą c lub a, np.

$c^2+8c-128=0$ lub $a^2-28a+52=0$

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... 4 pkt

- poprawne rozwiązanie równania kwadratowego, odrzucenie jednego z rozwiązań i poprawne wyznaczenie drugiej trójki liczb

albo

- przekształcenie układu równań z jedną niewiadomą do równania kwadratowego z błędem rachunkowym, np. błąd w redukcji wyrazów podobnych lub w przepisywaniu i konsekwentne doprowadzenie rozwiązania do końca (o ile otrzymane równanie kwadratowe ma dwa pierwiastki rzeczywiste).

Rozwiązanie pełne .... 5 pkt

Wyznaczenie szukanych liczb: $a=2,\ b=5,\ c=8$ lub $a=26,\ b=5,\ c=-16$.

<u>**II sposób rozwiązania**</u>

Oznaczamy: przez a – pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego, a przez r – różnicę tego ciągu. Wówczas $b=a+r,\ c=a+2r$.

Z własności ciągu arytmetycznego i z warunków zadania mamy $2a+2r=10$, stąd $a+r=5$

Z własności ciągu geometrycznego zapisujemy równanie, np.
$\left(a+r+4\right)^2=\left(a+1\right)\left(a+2r+19\right)$,

a następnie zapisujemy układ równań: $\begin{cases} a+r=5 \\ \left(a+r+4\right)^2=\left(a+1\right)\left(a+2r+19\right) \end{cases}$

Z pierwszego równania wyznaczamy $a=5-r$ i podstawiamy do drugiego równania.
Otrzymujemy równanie kwadratowe z niewiadomą r:
$\left(5-r+r+4\right)^2=\left(5-r+1\right)\left(5-r+2r+19\right)$ lub $r^2+18-63=0$.

Rozwiązaniami tego równania są: $r_1=3$ lub $r_2=-21$.

Następnie obliczamy a, b, c.
Warunki zadania spełniają liczby: $a=2,\ b=5,\ c=8$ lub $a=26,\ b=5,\ c=-16$.

<u>**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ....1 pkt
Wprowadzenie oznaczeń: a – pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego, r – różnica tego ciągu oraz wykorzystanie definicji ciągu arytmetycznego do zapisania odpowiedniego równania, np. $2a+2r=10$ lub $a+r=5$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt
Wykorzystanie własności ciągu geometrycznego i zapisanie układu równań, np.
$\begin{cases} a+r=5 \\ \left(a+r+4\right)^2=\left(a+1\right)\left(a+2r+19\right) \end{cases}$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....3 pkt
Przekształcenie układu równań do równania z niewiadomą r, np.
$\left(5-r+r+4\right)^2=\left(5-r+1\right)\left(5-r+2r+19\right)$ lub $r^2+18-63=0$.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe)...4 pkt

- poprawne rozwiązanie równania kwadratowego, odrzucenie jednego z rozwiązań, np. $r<0$ i poprawne wyznaczenie drugiej trójki liczb

albo

- przekształcenie układu równań z jedną niewiadomą do równania kwadratowego z błędem rachunkowym, np. błąd w redukcji wyrazów podobnych lub w przepisywaniu i konsekwentne doprowadzenie rozwiązania do końca (o ile otrzymane równanie kwadratowe ma dwa pierwiastki rzeczywiste).

Rozwiązanie pełne ....5 pkt
Wyznaczenie liczb spełniających warunki zadania: $a=2,\ b=5,\ c=8$ lub $a=26,\ b=5,\ c=-16$.

Zadanie 6. (0–5)

Obszar standardów	**Sprawdzane umiejętności**
Użycie i tworzenie strategii	Przeprowadzanie dyskusji trójmianu kwadratowego z parametrem

__I sposób rozwiązania__ (wzory Viète'a)

$x^2+mx+2=0$

Zapisujemy układ warunków:

$$\begin{cases}\Delta>0\\ x_1^2+x_2^2>2m^2-13\end{cases}$$

Rozwiązujemy pierwszą nierówność tego układu:

$\Delta=m^2-8$

$\Delta>0$

$m^2-8>0$

$m\in\left(-\infty,-2\sqrt{2}\right)\cup\left(2\sqrt{2},\infty\right)$

Aby rozwiązać drugą nierówność, najpierw przekształcimy lewą stronę nierówności, korzystając ze wzorów Viète'a:

$x_1^2+x_2^2=\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2=\left(-m\right)^2-2\cdot 2=m^2-4$

Rozwiązujemy zatem nierówność:

$m^2-4>2m^2-13$

$m^2-9<0$, więc $m\in\left(-3,3\right)$

Wyznaczamy wspólną część zbiorów rozwiązań układu nierówności:

$m\in\left(-\infty,-2\sqrt{2}\right)\cup\left(2\sqrt{2},\infty\right)$ i $m\in\left(-3,3\right)$, więc $m\in\left(-3,-2\sqrt{2}\right)\cup\left(2\sqrt{2},3\right)$.

__II sposób rozwiązania__ (wzory na pierwiastki trójmianu)

Zapisujemy układ warunków:

$$\begin{cases}\Delta>0\\ x_1^2+x_2^2>2m^2-13\end{cases}$$

Rozwiązujemy pierwszą nierówność:

$\Delta=m^2-8$

$\Delta>0 \quad m^2-8>0$

$m\in\left(-\infty,-2\sqrt{2}\right)\cup\left(2\sqrt{2},\infty\right)$

Obliczamy pierwiastki równania kwadratowego:

$$x_1=\frac{-m+\sqrt{m^2-8}}{2} \qquad x_2=\frac{-m-\sqrt{m^2-8}}{2}$$

Obliczamy sumę kwadratów pierwiastków równania kwadratowego:

$$x_1^2+x_2^2=\left(\frac{-m+\sqrt{m^2-8}}{2}\right)^2+\left(\frac{-m-\sqrt{m^2-8}}{2}\right)^2=$$

$$=\frac{m^2-2m\sqrt{m^2-8}+m^2-8}{4}+\frac{m^2+2m\sqrt{m^2-8}+m^2-8}{4}=$$

$$=\frac{2m^2+2m^2-16}{4}=m^2-4$$

Rozwiązujemy drugą nierówność:

$m^2-4>2m^2-13$

$m^2-9<0$

$m\in(-3,3)$

Wyznaczamy wspólną część zbiorów rozwiązań układu nierówności:

$m\in\left(-\infty,-2\sqrt{2}\right)\cup\left(2\sqrt{2},\infty\right)$ i $m\in(-3,3)$, więc $m\in\left(-3,-2\sqrt{2}\right)\cup\left(2\sqrt{2},3\right)$.

<u>Schemat oceniania</u>

Rozwiązanie zadania składa się z trzech części.

a) Pierwsza polega na rozwiązaniu nierówności $\Delta>0$, $m\in\left(-\infty,-2\sqrt{2}\right)\cup\left(2\sqrt{2},\infty\right)$.
Za poprawne rozwiązanie tej części zdający otrzymuje **1 punkt.**

<u>Uwaga</u>

Jeżeli zdający rozwiązuje nierówność $\Delta\ge 0$, to **nie otrzymuje punktu** za tę część.

b) Druga polega na rozwiązaniu nierówności $x_1^2+x_2^2>2m^2-13$, $m\in(-3,3)$.
Za tę część rozwiązania zdający otrzymuje **3 punkty**.

c) Trzecia polega na wyznaczeniu części wspólnej rozwiązań nierówności z a) i b).
Za poprawne rozwiązanie trzeciej części zdający otrzymuje **1 punkt**.

W ramach drugiej części rozwiązania wyróżniamy następujące fazy:

Rozwiązanie części b), w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ....1 pkt

- zapisanie nierówności $x_1^2+x_2^2>2m^2-13$ w postaci równoważnej $m^2-4>2m^2-13$

albo

- wykorzystanie wzorów na pierwiastki trójmianu kwadratowego i zapisanie nierówności
$$\left(\frac{-m+\sqrt{m^2-8}}{2}\right)^2+\left(\frac{-m-\sqrt{m^2-8}}{2}\right)^2>2m^2-13.$$

Pokonanie zasadniczych trudności części b) zadania ....2 pkt

Doprowadzenie do postaci nierówności kwadratowej $m^2-9<0$.

Rozwiązanie bezbłędne części b)..3 pkt

Rozwiązanie nierówności: $m\in(-3,3)$.

Rozwiązanie pełne .... 5 pkt

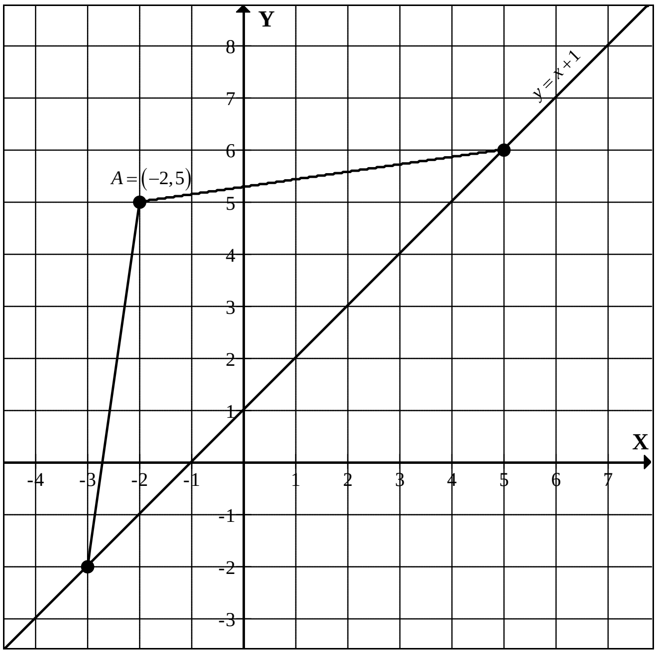
Wyznaczenie części wspólnej rozwiązań nierówności i podanie odpowiedzi:

$m\in\left(-3,-2\sqrt{2}\right)\cup\left(2\sqrt{2},3\right)$.

Zadanie 7. (0–6)

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności
Użycie i tworzenie strategii	Stosowanie równań i nierówności do opisania zależności w prostokątnym układzie współrzędnych

Rozwiązanie



Obliczamy odległość punktu A od prostej $y = x+1$: $d = \frac{|-2-5+1|}{\sqrt{1+1}} = 3\sqrt{2}$.

Obliczona odległość d jest równa długości wysokości trójkąta ABC poprowadzonej do boku BC. Znamy pole trójkąta ABC, więc obliczamy długość boku BC.

$P_{ABC} = 15$ stąd $\frac{1}{2} d \cdot |BC| = 15$, więc $|BC| = \frac{30}{3\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$

Punkt $C = (x, y)$ leży na prostej o równaniu $y = x+1$, zatem $C = (x, x+1)$. Z warunków zadania mamy $|AC| = |BC|$, więc ze wzoru na długość odcinka zapisujemy równanie:

$\sqrt{(x+2)^2 + (x+1-5)^2} = 5\sqrt{2}$.

Rozwiązujemy otrzymane równanie:

$\sqrt{(x+2)^2 + (x+1-5)^2} = 5\sqrt{2} \quad (\ )^2$

$x^2 + 4x + 4 + x^2 - 8x + 16 = 50$

$x^2 - 2x - 15 = 0$

$\Delta = 64 \qquad x_1 = 5 \qquad x_2 = -3$

Obliczamy rzędne punktów: $y_1 = 6 \quad y_2 = -2$

Warunki zadania spełniają dwa punkty: $C_1 = (5,6) \quad C_2 = (-3,-2)$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania .... 1 pkt

Obliczenie odległości punktu A od prostej $y = x+1$: $d = 3\sqrt{2}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt
Obliczenie długości odcinków *AC* i *BC*: $|AC| = |BC| = 5\sqrt{2}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....4 pkt
Ułożenie układu równań pozwalającego obliczyć współrzędne punktu *C* (odległość $|AC| = 5\sqrt{2}$ oraz punkt *C* należy do prostej o równaniu $y = x + 1$)

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ (x+2)^2 + (y-5)^2 = 50 \end{cases}$$

i sprowadzenie układu do równania kwadratowego: $x^2 - 2x - 15 = 0$.
Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ....5 pkt
Rozwiązanie pełne ....6 pkt
Wyznaczenie współrzędnych punktu *C*: $C = (5,6)$ lub $C = (-3,-2)$.

Zadanie 8. (0–5)

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności
Rozumowania i argumentacji	Przeprowadzenie dowodu algebraicznego

Rozwiązanie

Zapisujemy współrzędne dwóch punktów leżących na wykresie funkcji $f(x) = \frac{1}{x^2}$ oraz na prostej równoległej do osi Ox, np. $A = \left(x, \frac{1}{x^2}\right)$, $B = \left(-x, \frac{1}{x^2}\right)$, gdzie $x \neq 0$.

Zapisujemy pole trójkąta ABC, gdzie $C = (3,-1)$ w zależności od jednej zmiennej:

$$P_{\Delta ABC} = \frac{2 \cdot |x| \cdot \left|\frac{1}{x^2} + 1\right|}{2} = \frac{1}{|x|} + |x|.$$

Wystarczy wobec tego udowodnić, (lub powołać się na znaną nierówność), że dla dowolnej liczby $a > 0$ zachodzi nierówność $\frac{1}{a} + a \geq 2$. Po pomnożeniu obu stron nierówności przez a otrzymujemy nierówność równoważną $1 + a^2 \geq 2a$, czyli $a^2 - 2a + 1 \geq 0$, a więc nierówność $(a-1)^2 \geq 0$.

Schemat oceniania

Uwaga
Zdający otrzymuje 0 punktów, jeżeli wybierze konkretne dwa punkty *A* oraz *B* i dla tych punktów obliczy pole trójkąta *ABC*.
Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania ....1 pkt
Zapisanie współrzędnych dwóch punktów leżących na wykresie funkcji $f(x) = \frac{1}{x^2}$ oraz na prostej równoległej do osi Ox, np. $A = \left(x, \frac{1}{x^2}\right)$, $B = \left(-x, \frac{1}{x^2}\right)$, gdzie $x \neq 0$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt

Zapisanie długości odcinka *AB* ($|AB| = 2|x|$) oraz wysokości h trójkąta *ABC* ($h = \frac{1}{x^2} + 1$).

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt
Zapisanie pola trójkąta *ABC* w zależności od jednej zmiennej:

$$P_{\Delta ABC} = \frac{2 \cdot |x| \cdot \left|\frac{1}{x^2} + 1\right|}{2} = \frac{1}{|x|} + |x|$$

Uwaga
Zdający może założyć, że $x > 0$ i zapisać wzór na pole trójkąta w postaci:

$$P_{\Delta ABC} = \frac{2 \cdot x \cdot \left(\frac{1}{x^2} + 1\right)}{2} = \frac{1}{x} + x$$

Rozwiązanie pełne 5pkt
Uzasadnienie, że $\frac{1}{|x|} + |x| \geq 2$.

Zdający może powołać się na (znane) twierdzenie o sumie liczby dodatniej i jej odwrotności.

Zadanie 9. (0–4)

Obszar standardów	**Sprawdzane umiejętności**
Rozumowania i argumentacji	Przeprowadzenie dowodu geometrycznego

Rozwiązanie
Czworokąt *ABCD* jest równoległobokiem, czworokąt *DCFE* jest kwadratem, więc $|AB| = |CD| = |CF|$. W kwadracie *CBHG* odcinki *BC* i *CG* są równe.

Niech α oznacza kąt *ABC* danego równoległoboku. Wówczas $|\sphericalangle BCD| = 180° - \alpha$.

W kwadratach *CDEF* oraz *CBHG* mamy $|\sphericalangle DCF| = |\sphericalangle DCF| = 90°$, więc

$|\sphericalangle FCG| = 360° - (180° - \alpha) - 90° - 90° = \alpha = |\sphericalangle ABC|$.

W trójkątach *ABC* i *FCG* mamy zatem: $|AB| = |CF|$, $|BC| = |CG|$ oraz $|\sphericalangle FCG| = |\sphericalangle ABC|$, więc trójkąty *ABC* i *FCG* są przystające (cecha *bkb*). Stąd wnioskujemy, że $|AC| = |FG|$.

Schemat oceniania:
Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt
Zaznaczenie na rysunku odcinków *AC* i *FG* oraz zapisanie równości $|AB| = |CF|$ i $|BC| = |CG|$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt
Stwierdzenie, że trójkąty *ABC* i *FCG* są przystające, na podstawie cechy (*bkb*), bez podania pełnego uzasadnienia równości kątów $|\sphericalangle FCG| = |\sphericalangle ABC|$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt
Stwierdzenie, że trójkąty *ABC* i *FCG* są przystające, wraz z podaniem pełnego uzasadnienia równości kątów $|\sphericalangle FCG| = |\sphericalangle ABC|$.

Rozwiązanie pełne ....4 pkt
Zapisanie wniosku, że $|AC| = |FG|$.

Zadanie 10. (0–4)

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności
Modelowanie matematyczne	Obliczanie prawdopodobieństwa z zastosowaniem klasycznej definicji prawdopodobieństwa

__Rozwiązanie__
Zdarzeniami elementarnymi są trzywyrazowe ciągi o wartościach w zbiorze sześcioelementowym. Mamy model klasyczny. $|\Omega| = 6^3 = 216$.

Reszta z dzielenia kwadratu liczby całkowitej przez 3 może być równa 0 lub 1. Suma kwadratów trzech liczb będzie podzielna przez 3 wtedy, gdy każdy z nich będzie podzielny przez 3 albo gdy reszta z dzielenia każdego z nich przez 3 będzie równa 1.
Kwadraty liczb 3 i 6 są liczbami podzielnymi przez 3.
Kwadraty liczb 1, 2, 4 i 5 dają z dzielenia przez 3 resztę 1.
$|A|$ możemy obliczać następująco:

I sposób
- ciągi o wartościach ze zbioru $\{3,6\}$ – jest ich $2^3 = 8$,
- ciągi o wartościach ze zbioru $\{1,2,4,5\}$ – jest ich $4^3 = 64$,

czyli $|A| = 2^3 + 4^3 = 72$

II sposób
- ciągi stałe – jest ich 6,
- ciągi, w których występują dwie liczby ze zbioru $\{3,6\}$ – jest ich $2 \cdot 3 = 6$,
- ciągi, w których występują dwie liczby ze zbioru $\{1,2,4,5\}$ – jest ich $4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$,
- ciągi różnowartościowe o wartościach ze zbioru $\{1,2,4,5\}$ – jest ich $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$,

czyli $|A| = 6 + 6 + 36 + 24 = 72$,

III sposób
- ciągi, w których występują liczby dające tę sama resztę przy dzieleniu przez 3 – jest ich $3 \cdot 2^3 = 24$,
- ciągi, w których występują dwie liczby dające przy dzieleniu przez 3 resztę 1 i jedna liczba dająca przy dzieleniu przez 3 resztę 2 – jest ich $3 \cdot 2 \cdot 2^2 = 24$,
- ciągi, w których występują dwie liczby dające przy dzieleniu przez 3 resztę 2 i jedna liczba dająca przy dzieleniu przez 3 resztę 1 – jest ich $3 \cdot 2 \cdot 2^2 = 24$,

czyli $|A| = 24 + 24 + 24 = 72$,

Zatem $P(A) = \frac{72}{216} = \frac{1}{3}$.

__Schemat oceniania__
Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny do rozwiązania zadania ....1 pkt
Zdający zapisze, że $|\Omega| = 6^3$ i na tym zakończy lub dalej rozwiązuje błędnie.

Istotny postęp...2 pkt
Zdający zapisze, że suma kwadratów trzech liczb jest podzielna przez 3 tylko wtedy, gdy wszystkie liczby są podzielne przez 3 albo wszystkie są niepodzielne przez 3.
Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....3 pkt

Zdający poprawnie obliczy liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zajściu zdarzenia A: $|A| = 72$ i na tym zakończy lub dalej rozwiązuje błędnie.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

$P(A) = \frac{1}{3}$.

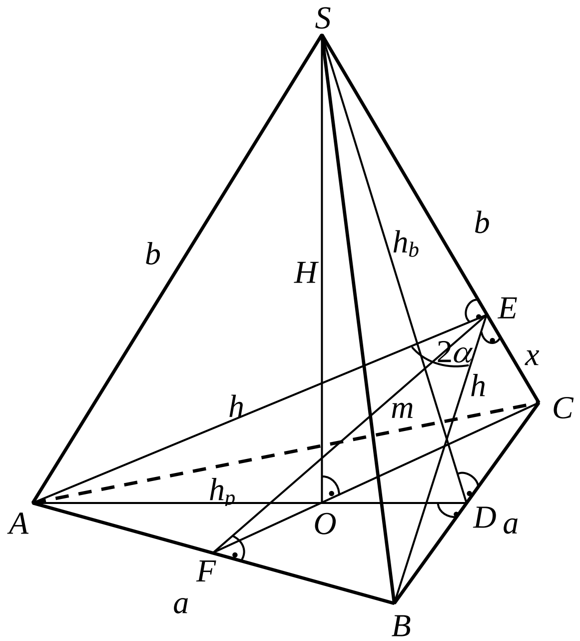
Zadanie 11. (0–5)

Obszar standardów	**Sprawdzane umiejętności**
Użycie i tworzenie strategii	Obliczanie objętości wielościanu z wykorzystaniem trygonometrii

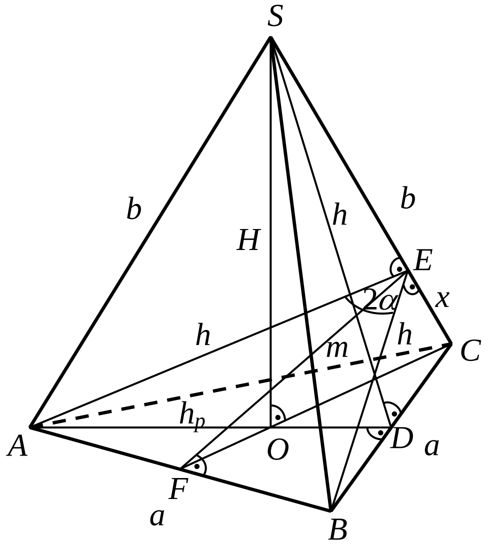
Uwaga
Strategię rozwiązania zadania można zrealizować na wiele sposobów. W każdym z nich wyróżniamy następujące etapy rozwiązania

- Poprawna interpretacja bryły i podanego kąta dwuściennego w tej bryle.
- Wyznaczenie m lub h w zależności od a i α.
- Wyznaczenie jednej z wielkości: x, b, h_b (w zależności od a i α), z której można już wyznaczyć H.
- Wyznaczenie H w zależności od a i α.
- Wyznaczenie V w zależności od a i α.

Użyliśmy oznaczeń jak na rysunku



Rozwiązanie (wyznaczenie *m*, wyznaczenie *x*, wyznaczenie *H* z podobieństwa trójkątów *OCS* i *ECF*)



Wysokość podstawy ostrosłupa jest równa $h_p = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Wyznaczamy wysokość *FE* trójkąta równoramiennego *ABE*

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{|FB|}{|BE|} = \frac{\frac{1}{2}a}{m}, \text{ stąd } m = \frac{a}{2\mathrm{tg}\alpha}.$$

Wyznaczamy długość odcinka *EC* z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie *FCE*:

$$x = \sqrt{h_p^{\ 2} - m^2}$$

$$x = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2\mathrm{tg}\alpha}\right)^2} = a\sqrt{\frac{3\mathrm{tg}^2\alpha - 1}{4\mathrm{tg}^2\alpha}} = \frac{a\sqrt{4\sin^2\alpha - 1}}{2\sin\alpha}$$

Z podobieństwa trójkątów *OCS* i *ECF* mamy

$$\frac{|OS|}{|OC|} = \frac{|EF|}{|EC|}, \text{ czyli } \frac{H}{\frac{2}{3}h_p} = \frac{m}{x}.$$

Stąd $H = \dfrac{m \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{4\sin^2\alpha - 1}}{2\sin\alpha}} = \dfrac{\frac{a}{2\mathrm{tg}\alpha} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3}}{\frac{a\sqrt{4\sin^2\alpha - 1}}{2\sin\alpha}} = \dfrac{a\cos\alpha}{\sqrt{3}\sqrt{4\sin^2\alpha - 1}}$.

Wyznaczamy objętość ostrosłupa:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\cos\alpha}{\sqrt{3}\sqrt{4\sin^2\alpha - 1}} = \frac{a^3\cos\alpha}{12\sqrt{4\sin^2\alpha - 1}}.$$

<u>Schemat oceniania</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny do pełnego rozwiązania zadania ....1 pkt

Wykonanie rysunku ostrosłupa i zaznaczenie na nim kąta między sąsiednimi ścianami bocznymi.

Uwaga
Nie wymagamy rysunku, jeżeli z dalszych obliczeń wynika, że zdający poprawnie interpretuje treść zadania.

Rozwiązanie, w którym jest istotny .... 2 pkt

Wyznaczenie wysokości EF trójkąta ABE w zależności od a i α: $m = \frac{a}{2\mathrm{tg}\alpha}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Wyznaczenie długości odcinka EC: $x = \frac{a\sqrt{4\sin^2\alpha - 1}}{2\sin\alpha}$.

Rozwiązanie prawie całkowite.. 4 pkt

Wyznaczenie wysokości ostrosłupa: $H = \frac{a\cos\alpha}{\sqrt{3\left(4\sin^2\alpha - 1\right)}}$.

Rozwiązanie pełne .... 5 pkt

Wyznaczenie objętości ostrosłupa: $V = \frac{1}{12}\frac{a^3\cos\alpha}{\sqrt{4\sin^2\alpha - 1}}$.